1747

De aequationibus differentialibus, quae certis tantum casibus integrationem admittunt

Leonhard Euler

DE AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS
QVAE CERTIS TANTVM CASIBVS INTEGRATIONEM ADMITTVNT.

AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum ad aequationes differentiales, quae generaliter integrari nequeunt methodis adhuc vſitatis, peruenitur; non parum augmenti analyſis accipere cenſenda eſt, ſi caſus ſaltem particulares aſſignentur, quibus integratio locum inueniat. Dum enim integratio caſuum ab integratione generalis aequationis non pendet, eo magis erit abſcondita atque inuentu difficilis, quo minus per generaliores integrandi methodos perfici poterit. Talis aequatio iam ante complures annos a *Comite Riccato* eſt producta, atque a nonnullis inſignibus geometris multum agitata, ex qua ſatis perſpicere licet, quam difficulter caſus integrabiles per alias methodos tractarentur, niſi reductione difficiliorum caſuum ad ſimpliciores vti vellemus. Caſus ſcilicet iſti integrabiles ita ſunt inuenti, vt idonea facta ſubſtitutione caſus ſimpliciſſimus, cuius integratio in promtu eſt, in alium transmutetur eadem forma generali contentum, hicque denuo in alium et ita porro in infinitum, quo facto horum caſuum omnium integratio ex ſimpliciſſimo conſequitur.

§. 2.

§. 2. Proponam hic autem aliam methodum latius patentem, qua non ſolum in aequatione illa *Riccatiana*, ſed etiam in plurimis aliis generalem integrationem pariter reſpuentibus, caſus integrabiles erui poterunt. Methodus vero mea in hoc conſiſtit, vt integrationem aequationis generalis per ſeriem abſoluam, quae in caſibus certis abrumpatur; hoc enim facto horum ipſorum caſuum integralia finitis aequationibus exprimentur. Sed cum quaelibet aequatio plurimis modis per ſeriem integrari poſſit; difficillimum plerumque eſt in eiusmodi ſeriem incidere, quae certis caſibus abrumpatur; ita aequationem illam *Riccatianam* per varias ſubſtitutiones in aliam formam transmutari oportet, antequam integratio per ſeriem eiusmodi abſolui queat, quae caſibus integrabilibus abrumpatur.

§. 3. Talis autem praeparatio, quae ad ſeriem idoneam manuducat, alio modo fieri nequit, niſi vt aequatio propoſita in aequationem differentialem ſecundi vel altioris cuiusdam gradus transmutetur, in qua altera variabilis vbique vnam tantum obtineat dimenſionem; huiusmodi enim aequatio facile et commode per ſeriem integrari poteſt. At hoc ſolum non ſufficit ad propoſitum noſtrum; ſeries enim praeterea haec ita debet eſſe comparata, vt certis caſibus abrumpi queat, quod euenit, ſi facto coefficiente vniuscuiusque termini $= 0$, ſequentium terminorum omnium coefficientes ſimul euaneſcant. Cum igitur haec praeparatio tantis laboret difficultatibus, expediet negotium a poſteriori aggredi, atque primo aequationem differentialem ſecundi gradus generaliſſimam contemplari, cuius integratio per ſeriem abſoluta hac gaudeat praerogatiua, vt infinitis caſibus fiat finita; quibus adeo caſibus aequatio aſſumta integrari po-

poterit. Hoc facto aequationem istam differentialem secundi gradus ad differentialem primi gradus reducam, eamque in varias formas transmutabo, quo plurimas imo infinitas obtineam aequationes differentiales primi gradus, quae iisdem casibus sint integrabiles. Hinc autem non solum perspicuum erit, aequationes inuentas illis casibus esse integrabiles, sed retrogrediendo etiam ipsa aequatio integralis assignari poterit.

§. 4. Huiusmodi autem aequatio differentialis secundi gradus, quae requisitis illis satisfaciat, atque latissime pateat, est haec:

$$(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)v\,dx^2=0,$$

in qua variabilis x elementum dx positum est constans. Ex hac autem aequatione valor ipsius v duplici modo per seriem definiri potest, quorum alter est, si ponatur $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+Ex^{m+4n}+$ etc. Hinc enim valoribus loco v, dv et ddv substitutis, et terminis homogeneis factis $=0$, sequentes prodibunt coefficientium A, B, C, D etc. et exponentis m determinationes. Primo enim debet esse $g+cm+am(m-1)=0$, vnde ne ad irrationalia perveniamus, m potius tamquam numerum cognitum spectemus ex eoque g determinemus, eritque $g=-cm-am(m-1)$. Deinde vero habebimus hoc valore loco g vbique substituto

$$B=\frac{-A(h+fm+bm(m-1))}{cn+an(2m+n-1)}$$

$$C=\frac{-B(h+f(m+n)+b(m+n)(m+n-1))}{2cn+2an(2m+2n-1)}$$

$$D=\frac{-C(h+f(m+2n)+b(m+2n)(m+2n-1))}{3cn+3an(2m+3n-1)}$$

$$E=\frac{-D(h+f(m+3n)+b(m+3n)(m+3n-1))}{4cn+4an(2m+4n-1)}\ \text{etc.}$$

Erit

Erit ergo A quantitas constans arbitraria, a qua sequentes coefficientes omnes pendent.

§. 5. Ex his coefficientium valoribus inuentis intelligitur, si vnicus coefficiens euanuerit, sequentes omnes simul euanescere, ita, vt his casibus valor ipsius v fiat finitus, atque idcirco aequatio assumta

$$(a+bx^n)x^2 ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$$

integrationem admitat. Si enim fuerit $h+fm+bm(m-1)=0$, tum erit $v=Ax^m$; sin autem sit $h+f(m+n)+b(m+n)(m+n-1)=0$, tum erit $v=Ax^m+Bx^{m+n}$, atque si $h+f(m+2n)+b(m+2n)(m+2n-1)=0$; erit $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}$. Semper igitur aequatio proposita integrationem admittet, quoties fuerit $h+f(m+in)+b(m+in)(m+in-1)=0$; seu $h=-f(m+in)-b(m+in)(m+in-1)$ denotante i numerum quemcunque integrum affirmatiuum cyphra non excepta. Interim tamen ii excipiendi sunt casus quibus denominatores euanescunt, ita ista integratio non succedit, si fuerit $c=-a(2m+(i+1)n-1)$, si quidem hoc casu i minor fuerit quam illo.

§. 6. Alter modus ex nostra aequatione valorem ipsius v per seriem eruendi, in hoc constat, vt ponatur $v=Ax^k+Bx^{k-n}+Cx^{k-2n}+Dx^{k-3n}+Ex^{k-4n}+$ etc. Hinc enim pro v, dv et ddv debitis valoribus surrogandis reperietur; $h+fk+bk(k-1)=0$, quare ponamus $h=-fk-bk(k-1)$. Porro vero erit

$$B=\frac{A(g+ck+ak(k-1))}{nf+nb(2k-n-1)}$$

$$C=\frac{B(g+c(k-n)+a(k-n)(k-n-1))}{2fn+2bn(2k-2n-1)}$$

$$D=\frac{C(g+c(k-2n)+a(k-2n)(k-2n-1))}{3fn+3bn(2k-3n-1)}$$

$$E=\frac{D(g+c(k-3n)+a(k-3n)(k-3n-1))}{4fn+4bn(2k-4n-1)} \text{ etc.}$$

 Quo-

Quoties ergo fuerit $g = -c(k-in) - a(k-in)(k-in-1)$ denotante vt ante i numerum quemcunque integrum affirmatiuum, toties aequatio propofita erit integrabilis. Namque fi $i=0$ erit $v = Ax^k$, fi $i=1$ erit $v = Ax^k + Bx^{k-n}$; fi $i=2$ erit $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n}$ et ita porro.

§. 7. Aequatio ergo noftra generalis

$$(a+bx^n)x^2 ddv + (c+fx^n)x dx dv + (g+hx^n) v dx^2 = 0$$

in qua eft $g = -cm - am(m-1)$ atque $h = -fk - bk(k-1)$, quibus definitionibus nulla vis amplitudini aequationis infertur, cum loco arbitrariarum quantitatum g et h duae nouae arbitrariae m et k introducantur. Haec, inquam, aequatio integrationem admittit, quoties fuerit

$$\text{vel } f = \frac{(m+in)(m+in-1)-k(k-1)}{k-m-in} b = (1-k-m-in)b,$$

$$\text{vel } c = \frac{(k-in)(k-in-1)-m(m-1)}{m-k+in} a = (1-k-m+in)a$$

Duplici ergo modo infiniti cafus affignari poffunt, quibus aequatio propofita integrabilis exiftit; atque infuper his fingulis cafibus ipfa integralia feu valores ipfius v per x algebraice exprimi poterunt, quaerendo valores coefficientium B, C, D, etc. quippe quorum numerus iftis cafibus fiet finitus.

§. 8. Quamuis autem hoc modo cafuum erutorum integralia algebraica inueniantur, tamen non eft putandum haec integralia aeque latere, ac aequationes differentiales ex quibus funt ortae. Quemadmodum enim integrale ipfius dx non folum eft x fed etiam $x+a$, ita haec integralia algebraica, quae hoc modo inueniuntur, funt tantum cafus particulares plenorum integralium, qui oriuntur fi conftans quaepiam arbitraria vel nihilo vel infinito aequalis ponatur. Interim tamen in his omnibus cafibus, qui-

bus

bus integrale ſpeciale inuenitur, ope ipſius huius integralis ſpecialis generale et plenarium integrale facile inueniri poteſt. Sit enim aequatio differentio differentialis $P\,ddv + Q\,dx\,dv + R\,v\,dx^2 = o$; vbi P, Q, R ſint functiones quaecunque ipſius x, cuius iam inuentum ſit integrale particulare per huiusmodi viam ſcilicet $v = X$ hoc eſt functioni cuidam ipſius x. Iam ad aequationem integralem completam eruendam pono $v = Xz$ erit $dv = z\,dX + X\,dz$ atque $ddv = z\,ddX + 2\,dX\,dz + X\,ddz$, quibus ſubſtitutis aequatio propoſita abibit in hanc

$$\begin{aligned} &+ PzddX + 2PdXdz + PXddz = o. \\ &+ QzdXdx + QXdxdz \\ &+ RzXdx^2 \end{aligned}$$

ſed cum X ſit valor, qui pro v ſubſtitutus ſatisfacit erit $PddX + QdXdx + RXdx^2 = o$, Quo circa deletis his terminis reſtabit $2PdXdz + QXdxdz + PXddz = o$ ſeu $\frac{2dX}{X} + \frac{Qdx}{P} + \frac{ddz}{dz} = o$; in qua cum P et Q ſint functiones ipſius x, ponatur $\int \frac{Qdx}{P} = S$ eritque integrando $X^2\,dz = Ce^{-s}\,dx$; atque $z = C\int \frac{e^{-s}\,dx}{X^2}$: denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1. Aequationis ergo $P\,ddv + Q\,dx\,dv + R\,v\,dx^2 = o$, cui ſatisfacit $v = X$ completum integrale erit $v = CX\int \frac{e^{-\int \frac{Qdx}{P}}\,dx}{X^2}$

§. 9. Cum igitur conſtet quibusnam caſibus aequatio noſtra differentio-differentialis $(a + bx^n)x^2\,ddv + (c + fx^n)x\,dx\,dv + (g + hx^n)\,v\,dx^2 = o$ integrationem admittat, atque ſimul etiam horum caſuum integralia completa inueniri queant; inquiramus in aequationes differen-

 tiales

tiales primi gradus, quae ex ista resultent, atque ideo iisdem casibus integrabiles existant. Aequatio autem proposita facile in aequationem differentialem primi gradus transmutatur ponendo $v = e^{\int z dx}$, ita vt sit $z = \frac{dv}{v dx}$. vnde cognito valore ipsius v, simul valor ipsius z innotescit. Erit vero $dv = e^{\int z dx} z dx$ et $ddv = e^{\int z dx} (dx dz + z^2 dx^2)$ quibus valoribus substitutis aequatio nostra transibit in hanc. $(a + bx^n) x^2 dz + (c + fx^n) xz dx + (a + bx^n) x^2 z^2 dx + (g + hx^n) dx = 0$. Haec ergo aequatio differentialis primi gradus, factis $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -fk - bk(k-1)$ semper est integrabilis, si fuerit vel $f = \frac{(m+in)(m+in-1) - k(k-1)}{k-m-in} b = (1-k-m-in)b$

vel $c = \frac{(k-in)(k-in-1) - m(m-1)}{m-k+in} a = (1-k-m+in)a$

quibus casibus etiam ex valore ipsius v inuento, valor ipsius z tam completus quam incompletus ope aequationis $z = \frac{dv}{v dx}$, inuenietur.

§. 10. Quo autem clarius appareat, quales aequationes simpliciores in hac generali contineantur, in aliam formam aequationem inuentam transmutemus, in qua tres tantum insint termini huius formae $P dz + Q z^2 dx + R dx = 0$ denotantibus P, Q, et, R, functiones ipsius x. Haec vero reductio pluribus modis fieri potest, quorum primus est, si ponatur $z = Ty$, vbi T est functio ipsius x etiamnum incognita. Facta ergo hac substitutione erit

$$(a + bx^n) T x^2 dy + (a + bx^n) y x^2 dT + (a + bx^n) T^2 x^2 y^2 dx + (g + hx^n) dx = 0 + (c + fx^n) T y x dx$$

in qua ponatur $(c + fx^n) T dx + (a + bx^n) x dT = 0$ quo terminus, qui y continet, euanescat; habebitur ergo

$(c + f$

$\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x}+\frac{dT}{T}=0$, vnde valorem ipſius T erui oportet. Reducetur autem haec aequatio ad iſtam $\frac{c\,dx}{ax}+\frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)}+\frac{dT}{T}=0$, cuius integrale eſt $\frac{c}{a}\,lx+\frac{af-bc}{abn}\,l(a+bx^n)+lT=C$ atque $T=\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$. Poſito ergo $z=\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$ aequatio noſtra abibit in hanc

$$dy+\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{anb}}y^2dx}{x^{\frac{c}{a}}}+\frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}}=0$$

quae propterea iisdem caſibus, quibus ſuperiores aequationes, integrationem admittit.

§. 11. Hinc iam ſpecialiores formemus aequationes ponendo primo $bc=af$ vt ſit $dy+x^{-\frac{c}{a}}y^2dx+\frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{a+bx^n}=0$

Ponatur porro $x^{\frac{a-c}{a}}=t$ ſeu $x=t^{\frac{a}{a-c}}$ habebitur $dy+\frac{ay^2dx}{a-c}+\frac{a(g+ht^{\frac{na}{a-c}})dt}{(a-c)(a+bt^{\frac{an}{a-c}})tt}=0$. Haec ergo aequatio, ſi fuerit $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-\frac{b}{a}(ck+ak(k-1))$ ſemper integrationem admittet, quoties erit vel $c=(1-k-m-in)a$ vel $c=(1-k-m+in)a$ hoc eſt quoties erit $\frac{c+a(k+m-1)}{an}$ numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus.

§. 12.

§. 12. Si insuper fuerit $c = o$, habebitur loco g et h actu substitutis suis valoribus $dy + y^2 dt = \frac{(am(m-1) + bk(k-1)t^n)dt}{(a+bt^n)tt}$ quae aequatio integrabilis erit, quoties fuerit vel $\frac{1-k-m}{n}$ vel $\frac{k+m-1}{n}$ numerus integer affirmatiuus; hoc est quoties fuerit $\frac{k+m-1}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Haec ergo aequatio $dy + y^2 dt = \frac{am(m-1)dt}{a+bt^n)t.}$ integrabilis erit, si fuerit vel $\frac{m-1}{n}$ vel $\frac{m}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Atque haec aequatio $dy + y^2 dt = \frac{bk(k-1)t^n dt}{(a+bt^n)t}$ integrabilis erit, si vel $\frac{k-1}{n}$ vel $\frac{k}{n}$ fuerit numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus.

§. 13. At si fuerit $c = a$, habebitur ista aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(mma + kkbx^n)dx}{(+bx^n)x}$ quae semper integrationem admittet quoties fuerit $\frac{k+m}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Quare haec aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{m^2 adx}{(a+bx^n)x}$ integrabilis erit, quoties $\frac{m}{n}$ fuerit numerus integer; haec vero aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{k^2 bx^{n-1} dx}{a+bx^n}$, quoties $\frac{k}{n}$ fuerit numerus integer.

§. 14. Resumamus aequationem generalem $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$, et ponamus

namus $c = -a(n-1)$, fiatque $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} = t$, vt fit $x^n = \frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}$; prodibit ifta aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{b-f} +$

$$\frac{b(bg - ab + bt^{\frac{bn}{b-f}})\, t^{\frac{bn}{b-f}-2}\, dt}{(b-f)(t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^2} = 0,$$

in qua eft $g = am(n-m)$ et $h = -fk - bk(k-1)$. Hacc vero aequatio toties integrabilis euadit, quoties fuerit vel $\frac{k+m-n}{n}$ numerus integer affirmatiuus feu i vel $\frac{f+b(m+k-1)}{bn}$ numerus integer negatiuus. Si infuper fuerit $f = b - nb$, orietur ifta aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{nb} + \frac{b(am(n-m) - ak(n-k) + k(n-k)t)dt}{nt(t-a)^2} = 0$, quae femper integrationem admittet dummodo $\frac{k+m}{n}$ fuerit numerus integer fiue affirmatiuus fiue negatiuus. Hinc pofito $k = n$, ifta aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{nb} + \frac{abm(n-m)dt}{nt(t-a)^2} = 0$, integrationem admittet, fi fuerit $\frac{m}{n}$ numerus integer. At facto $m = n$, haec aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{nb} + \frac{bk(n-k)dt}{nt(t-a)} = 0$, integrabilis erit, quando fuerit $\frac{k}{n}$ numerus integer fiue affirmatiuus fiue negatiuus.

§. 15. Reuertamur ad aequationem primitiuam inter x et z inuentam

$$(a+bx^n)x^2dz + (c+fx^n)xzdx + (a+bx^n)x^2z^2dx + (g+hx^n)dx = 0,$$

quae pofito $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -fk - bk(k-1)$ integrabilis eft, fi fuerit vel $f = (1-k-m-in)b$, vel $c = (1-k-m+in)a$. Alio autem modo eam transformemus in aequationem tribus tantum terminis conftantem. Ponamus fcilicet $z = Ty + S$, denotantibus T et S functionibus ipsius x; erit $dz = \mathrm{T}dy + yd\mathrm{T} + d\mathrm{S}$ his substitutis prodibit ista aequatio

$$\begin{aligned}(a+bx^n)\mathrm{T}x^2dy &+ (a+bx^n)x^2yd\mathrm{T} + (a+bx^n)x^2\mathrm{T}^2y^2dx + (a+bx^n)x^2d\mathrm{S} = o\\ &+ (c+fx^n)\mathrm{T}xydx \qquad\qquad + (c+fx^n)x\mathrm{S}dx\\ &+ 2(a+bx^n)x^2\mathrm{TS}ydx \qquad + (a+bx^n)x^2\mathrm{S}^2dx\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + (g+hx^n)dx\end{aligned}$$

ex qua, quo terminus y continens egrediatur, ponatur $(a+bx^n)xd\mathrm{T} + 2(a+bx^n)x\mathrm{TS}dx + (c+fx^n)\mathrm{T}dx = o$, seu $\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} + 2\mathrm{S}dx + \frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x} = 0$. Ponamus ante omnia $\mathrm{T} = x^p$, quo post diuisionem per $(a+bx^n)\mathrm{T}xx$ coefficiens ipsius y^2dx fiat simplex potestas ipsius x; erit $\frac{p}{x} + 2\mathrm{S} + \frac{c+fx^n}{x(a+bx^n)} = 0$ atque $\mathrm{S} = \frac{-c-ap-(f+bp)x^n}{2x(a+bx^n)}$. Hinc fiet

$$d\mathrm{S} = \frac{a(c+ap)dx - a(n-1)(f+bp)x^ndx + b(f+bp)x^{2n}dx + b(n+1)(c+ap)x^ndx}{2xx(a+bx^n)^2}.$$

Atque his valoribus substitutis obtinebitur ista aequatio $(a+bx^n)x^{p+2}dy + (a+bx^n)x^{2p+2}y^2dx + \frac{p(p+2)(a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx + (f+2h)x^ndx}{2}$ $\frac{-ccdx + 2n(bc-af)x^ndx - 2cfx^ndx - ffx^{2n}dx}{4(a+bx^n)} = o$ quae per $(a+bx^n)x^{p+2}$ diuisa reducitur ad hanc $dy + x^py^2dx + \frac{p(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(c+2g)dx + (f+2h)x^ndx}{2(a+bx^n)x^{p+2}} - \frac{(c+fx^n)^2dx + 2n(bc-af)x^ndx}{4(a+bx^n)^2x^{p+2}}$ Quae aequatio ita est comparata, vt posito $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -fk - bk(k-1)$, sem-

ſemper ſit integrabilis, ſi fuerit vel $\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$ vel $\frac{(k+m-1)ac+}{an}$ numerus integer affirmatiuus.

§. 16. Ponamus primo $bc-af=o$ ſeu $f=\frac{bc}{a}$; et aequatio inuenta tranſibit in hanc $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}=o$, quae ſi ſit $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-\frac{b}{a}(ck+ak(k-1))$, integrabilis exiſtit, ſi $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ fuerit numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Ponamus porro $c=a$, quo prodeat iſta aequatio $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}=\frac{(amm+bkkx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}$, quae integrabilis erit ſi $\frac{k+m}{n}$ fuerit numerus integer.

§. 17. Ponamus in aequatione generali vltimo §. 15. inuenta $b=o$, quo meri termini ſimplices prodeant, habebitur iſta aequatio $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4aax^{p+2}}+\frac{gdx}{ax^{p+2}}+\frac{(af-naf+2ah-cf)x^ndx}{2a^2x^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}}=o$, quae poſito $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-fk$ integrabilis exiſtit, ſi vel $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, vel ſi ſit $f=o$; qui quidem caſus per ſe conſtat. Ponamus $a^2(p+1)^2-(a-c)^2+4ag=\alpha a^2$, atque $af-naf-2afk-cf=\beta af$. erit $g=\frac{\alpha a^2+(a-c)^2-a^2(p+1)^2}{4a}$ et $c=a-na-2ak-\beta a$); vnde erit $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\beta)^2-a(p+1)^2}{4}$, quibus ſubſtitutis erit $dy + x^p y^2 dx + \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}} + \frac{\beta f x^n dx}{2ax^{p+2}} - \frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}} = o$, eſtque ob valorem ipſius g iam ante definitum $n + 2k + \beta = 2m + \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}$, at aequatio integrationem admittet, ſi fuerit $\frac{m-n-k-\beta}{n}$ ſeu $\frac{-n-\beta \pm \sqrt{((p+1)^2-\alpha)}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus. Sit $\alpha = o$ et $\beta = o$ habebitur iſta aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa}$ quae toties integrationem admittit, quoties fuerit $\frac{-n \pm (p+1)}{2n}$ numerus integer affirmatiuus. Sit ergo $i = \frac{-n \pm (p+1)}{2n}$ erit $n = \frac{\pm(p+1)}{2i+1}$, atque aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{\frac{\pm 2(p+1)}{2i+1} - p - 2} dx}{4aa}$ ſemper erit integrabilis. Haec autem aequatio ipſa eſt Riccatiana; nam poſito $p = 0$ prodit $dy + y^2 dx = \frac{ffx^{\frac{\pm 2 - 4i - 2}{2i+1}} dx.}{4aa}$

§. 18. Ponamus tantum $\alpha = o$, habebimus hanc aequationem $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} - \frac{\beta f x^{n-p-2} dx}{2a}$, quae integrabilis erit, ſi fuerit $\frac{\pm(p+1) - n - \beta}{2n}$ numerus integer affirmatiuus puta i. Facto autem $\pm(p+1) - n - \beta = 2ni$ erit $\beta = \pm(p+1) - n(2i+1)$. Quamobrem haec aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{(nf(2i+1) \pm f(p+1))x^{n-p-2}dx}{2a}$ ſemper eſt integrabilis. Hinc ſequuntur ſequentes aequationes ſimpliciores

$dy +$

$$dy + y^2\,dx = \frac{ffxxdx}{4aa} + \frac{f(4i+2\pm1)dx}{2a}$$
$$dy + y^2\,dx = \frac{ffdx}{4aa} + \frac{f(2i+1\pm1)dx}{2ax}$$
$$dy + \frac{y^2dx}{x} = \frac{ffxdx}{4aa} + \frac{f(2i+1)dx}{2a}$$

quae omnes ſunt integrabiles. Quare haec aequatio $dy + Ay^2\,du = Buu\,du + C\,du$ integrabilis exiſtit, quando $\frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ fuerit numerus integer affirmatiuus impar, namque $4i+2 \pm 1$ omnes numeros impares complectitur in ſe.

§. 19. Ponamus in ſuperiore aequatione tantum $\mathfrak{C} = 0$; et prodibit iſta aequatio $dy + x^py^2\,dx = \frac{ffx^{2n}\,dx}{4aax^{p+2}} - \frac{\alpha\,dx}{4x^{p+2}}$, quae integrabilis erit, quoties fuerit $\frac{-n \pm \sqrt{((p+1)^2-\alpha)}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus, qui ſit i, erit ergo $n(2i+1) = \sqrt{((p+1)^2-\alpha)}$ atque $\alpha = (p+1)^2 - n^2(2i+1)^2$. Quamobrem haec aequatio $dy + x^py^2\,dx = \frac{ffx^{2n-p-2}\,dx}{4aa} + \frac{(n^2(2i+1)^2-(p+1)^2)dx}{4x^{p+2}}$ ſemper integrabilis erit. Si ſit $p = 0$, erit iſta aequatio $dy + y^2dx = \frac{ff}{4aa}x^{2n-2}\,dx + \frac{(n^2(2i+1)^2-1)dx}{4xx}$ pariter ſemper integrabilis. Hinc ponendo $\frac{ff}{4aa} = A$, quia f et a ſunt quantitates arbitrariae, integrabiles erunt ſequentes aequationes

$$dy + y^2\,dx = A\,dx + \frac{i(i+1)dx}{xx}$$
$$dy + y^2\,dx = Ax^2dx + \frac{(4i+3)(4i+1)dx}{4xx}$$
$$dy + y^2\,dx = Ax^4dx + \frac{(3i+2)(3i+1)dx}{xx}$$

atque huius generis innumerabiles aliae.

§. 20

§. 20. Fiat in aequatione $dy + x^p y^2 dx = \frac{dx(ffx^{2n} - 2a\beta f x^n - \alpha a^2)}{4a^2 x^{p+2}}$ §. 17. inuenta $\alpha = -\beta^2$, quo fit $dy + x^p y^2 dx = \frac{(fx^n - \beta a)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}}$ quae aequatio toties integrabilis erit, quoties fuerit $\frac{-n-\beta \pm \sqrt{((p+1)^2+\beta^2}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus puta $= i$. Erit ergo $(2i+1)n + \beta = \sqrt{((p+1)^2 + \beta^2)}$ atque $\beta = \frac{(p+1)^2 - n^2(2i+1)^2}{2n(2i+1)}$. quoties ergo β huiusmodi habuerit valorem, aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{(fx^n - \beta a)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}}$ integrationem admittet. Posito igitur $p = o$ ista aequatio $dy + y^2 dx = \frac{dx}{xx}\left(\frac{n^2(2i+1)^2 - 1}{4n(2i+1)} + \frac{f}{2a}x^n\right)^2$ integrabilis erit. At si $p = -1$ prodibit ista aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{dx}{x}\left(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{f}{2a}x^n\right)^2$ integrabilis. Sit autem $x^{p+1} = t$, erit $x^p dx = \frac{dt}{p+1}$; $x^n = t^{\frac{n}{p+1}}$; et $\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dt}{(p+1)tt}$, habebitur ergo ista aequatio $(p+1)dy + y^2 dt = \frac{(ft^{\frac{n}{p+1}} - \beta a)^2 dt}{4a^2 tt}$ quae integrabilis erit, si fuerit $\beta = \frac{(p+1)^2 - n^2(2i+1)^2}{2n(2i+1)}$.

§. 21. Multo quidem plura consectaria ex nostra aequatione generali non parum elegantia deduci possent; sed ampliorem euolutionem aliis, quos haec iuuant, relinquo. Interim notari conuenit praeter hanc methodum, quam sum secutus, alias dari innumeras, quarum ope aequationes differentiales, quae certis duntaxat casibus integrabiles euadunt, inueniri possunt, sed operatio nimis fit laboriosa. Ita si consideretur haec aequatio $(a + bx^n + cx^{2n})x^2 ddv + (f + gx^n + hx^{2n})x dx dv + (p + qx^n + rx^{2n}) v dx^2 = o$, po-

ponaturque $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ etc. hos coefficientes quidem definire licebit, ſed binos contiguos euaneſcere oportet, quo ſequentes omnes euaneſcant. Scilicet quo fiat $v = Ax^m$ neceſſe eſt vt ſit $p + fm + am(m-1) = 0$; ſimulque $q + gm + bm(m-1) = 0$ et $r + hm + cm(m-1) = 0$. Quo autem fiat $v = Ax^m + Bx^{m+n}$, requiritur vt ſit primo $B = -\frac{A(q+gm+bm(m-1))}{nf+na(2m+n-1)}$, ſecundo $p + fm + am(m-1) = 0$; tertio $r + h(m+n) + c(m+n)(m+n-1) = 0$ et quarto $n^2(h + c(2m+n-1))(f + a(2m+n-1)) + (q + gm + bm(m-1))(q + g(m+n) + b(m+n)(m+n-1)) = 0$. Ex quo ſatis liquet, vlterius progrediendo laborem in immenſum excreſcere.

§. 22. Vnicum tamen coronidis loco exemplum ſimplicius afferam, quo feci $b = 0$, $c = 0$, $f = 0$ et $g = 0$, poſitoque $v = e^{\int z dx}$ poſui $z = y - \frac{h}{2a}x^{2n-1}$, quo facto ſequens prouenit aequatio $dy + y^2 dx = \frac{hh}{4aa}x^{4n-2}dx + \frac{x^{2n-2}dx}{2a}(h(2n-1) - 2r) - \frac{q}{a}x^{n-2}dx + \frac{m(m-1)dx}{xx}$; quae per duos caſus expoſitos integrabilis eſt, primo ſi fuerit $q = 0$ et $r = -mh$; ſecundo ſi fuerit $q = n\sqrt{ah}(1-n-2m)$ et $r = -h(m+n)$, preter hos vero caſus infiniti dantur alii, quibus iſta aequatio pariter integrabilis exiſtit, ſed ad eos determinandos reſolutiones aequationum plurium dimenſionum requiruntur. Poſito $r = \frac{h(2n-1)}{2}$ per ſecundum caſum iſta aequatio $dy + y^2 dx = \frac{hh}{4aa}x^{4n-2}dx \pm \frac{n}{a}x^{n-2}dx\sqrt{3ahn} + \frac{(16nn-1)dx}{4xx}$ integrabilis erit.

SO-